**TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI**

**VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC**

A picture containing logo

Description automatically generated

**BÁO CÁO GIẢI TÍCH SỐ**

***CHỦ ĐỀ 16:* Phương pháp lũy thừa và phương pháp xuống thang tìm giá trị riêng và vectơ riêng**

Sinh viên: Trần Thanh Tùng - 20206184

Lớp: CTTN Toán Tin K65

Giảng viên hướng dẫn: TS. Hà Thị Ngọc Yến

Mục lục

1. **Bài toán và ý tưởng3**
   1. Bài toán3
   2. Ý tưởng3
2. **Xây dựng công thức4**
   1. Tìm trị riêng trội đơn, thực4
   2. Tìm trị riêng trội bội r, thực5
   3. Tìm trị riêng trội đơn, thực, trái dấu5
   4. Tìm trị riêng trội phức liên hợp7
3. **Phương pháp xuống thang8**
   1. Ý tưởng8
   2. Xây dựng công thức8
   3. Xuống thang trường hợp trội đơn, thực9
   4. Xuống thang trường hợp trội đơn, thực, trái dấu10
4. **Thuật toán và chương trình10**
   1. Các gói xử lý10
   2. Chương trình chính19
   3. Ví dụ21
5. **Đánh giá phương pháp24**
   1. Ưu điểm24
   2. Nhược điểm24

**Tài liệu tham khảo24**

1. **Bài toán và ý tưởng**
   1. **Bài toán**

- Tính gần đúng giá trị riêng trội và vectơ riêng tương ứng của ma trận vuông cấp n có các phần tử là thực và có đủ n giá trị riêng thực hoặc phức.

VD: Tính gần đúng trị riêng trội của ma trận

* 1. **Ý tưởng**

- Giá trị riêng trội:

+ Matrận A vuông cỡ n thực có các giá trị riêng khác nhau xếp theo thứ tự:

+ Các vector riêng ứng với các giá trị riêng:

+ Khi đó: là giá trị riêng trội.

+ Khi đó: là các giá trị riêng trội.

- Tính chất: là giá trị riêng trội khi .

- Lưu ý:Không phải ma trận nào cũng có giá trị riêng trội.

VD: Ma trận dưới đây có nên không có trị riêng trội

- Tương tự, dựa vào các trường hợp nghiệm của phương trình đặc trưng của ma trận ta có thể có nhiều trường hợp khác nhau của các giá trị riêng.

1. **Xây dựng công thức**
   1. **Tìm trị riêng trội đơn, thực**

- Giả sử ma trận cấp n có đủ n trị riêng thực, được sắp xếp theo thứ tự môđun giảm dần:

- Các vector riêng tương ứng là là hệ vector độc lập tuyến tính.

- Chọn vector sao cho ≠ 0

Vì là giá trị riêng trội khi .

(1)

- Đẳng thức (1) chứng tỏ rằng là vector riêng tương ứng với giá trị riêng hay với giá trị riêng .

- Lưu ý: Nên thu nhỏ các vector sau mỗi lần tính để tránh bị tràn số khi k lớn.

* 1. **Tìm trị riêng trội bội r, thực**

- Giả sử thực và bội r, tức là:

- Làm tương tự như trên ta được:

(2)

- Đẳng thức (2) chứng tỏ rằng là vector riêng tương ứng với giá trị riêng hay với giá trị riêng .

- Tuy nhiên, trong trường hợp bội , sẽ có vector riêng độc lập tuyến tính ứng với nhưng ta chỉ có thể tìm được 1 vector và cũng không phân biệt được đây là trị riêng bội 1 hay bội r.

* 1. **Tìm trị riêng trội đơn, thực, trái dấu**

- Giả sử và

- Chọn vector sao cho , ≠ 0

,

- Từ (3) và (4)

- Hoàn toàn tương tự

* 1. **Tìm trị riêng trội phức liên hợp**

- Giả sử và

- Chọn vector sao cho , ≠ 0

(5)

- Đặt ,

- Khi đó là nghiệm của phương trình

- Viết lại (5):

- Chọn các chỉ số r, s sao cho:

≠ 0; ≠ 0; ≠ 0

≠ 0; ≠ 0; ≠ 0

- Giải hệ phương trình

- Giải

,

- Mặt khác, ta có:

- Hoàn toàn tương tự

1. **Phương pháp xuống thang**
   1. **Ý tưởng**

- Ta sẽ biến đổi A thành ma trận mới có n-1 giá trị riêng giống A (trừ trị riêng trội vừa tìm được) và giá trị riêng vừa tìm được chuyển thành 0.

- Vector có thành phần thứ s bằng 1

Xây dựng ma trận

- Với vector bất kỳ ta có:

- Đặc biệt:

* 1. **Xây dựng công thức**

- Giả sử ma trận cấp n có n trị riêng, , ..., và các vector riêng tương ứng .

- Bằng phương pháp lũy thừa ta tìm được , chia cho phần tử tại vị trí có mođun lớn nhất của .

- Xây dựng ma trận

- Tiếp tục quá trình này k-1 lần ta được ma trận:

( ở đây là vector riêng ứng với giá trị riêng trội của )

- Ma trận này có các tính chất sau:

* 1. **Xuống thang trường hợp trội đơn, thực**

- Ma trận cấp n có đủ n trị riêng: và các vector riêng tương ứng .

- Áp dụng phương pháp lũy thừa tìm được , chia cho phần tử tại vị trí có mođun lớn nhất của .

- Sau đó, ta xuống thang 1 lần được ma trận  nhận , , ..., , 0 làm giá trị riêng với các vectơ riêng tương ứng là , , ..., , .

- Dùng phương pháp lũy thừa để tính các trị riêng trội và vecto riêng tương ứng của .

- Dùng trị riêng tìm được và giải = để tìm vecto riêng ban đầu.

- Tiếp tục quá trình xuống thang n-1 lần để tìm được toàn bộ giá trị riêng và vector riêng.

* 1. **Xuống thang trường hợp trội đơn, thực, trái dấu**

- Ma trận cấp n có đủ n trị riêng:, và các vector riêng tương ứng .

- Xuống thang 2 lần được ma trận nhận , , ..., , 0, 0 làm giá trị riêng với các vectơ riêng tương ứng là , ..., , , .

- Dùng phương pháp lũy thừa để tính các trị riêng trội và vecto riêng tương ứng của .

- Dùng trị riêng tìm được và giải = để tìm vecto riêng ban đầu.

- Tiếp tục quá trình xuống thang n-2 lần để tìm được toàn bộ giá trị riêng và vector riêng.

1. **Thuật toán và chương trình**
   1. **Các gói xử lý**

- **Gói chuẩn hóa** (normalize):

Input: x

Tìm số có giá trị tuyệt đối lớn nhất trong x là x[i]

x đã chuẩn hóa = x/x[i]

Output: x đã chuẩn hóa

Text

Description automatically generated

- **Gói tính**  (calc):

Input: A, m, B (đã lưu sẵn B[0] = x)

Tính M = A x B[m-1]

Chuẩn hóa M = normalize(M)

Lưu B[m] = M

Output: Lưu đã chuẩn hóa vào cột m mảng B

Text

Description automatically generated

- **Gói tính mở rộng** (toàn bộ chương trình không dùng gói này, chỉ mang tính chất tìm hiểu thêm):

Input: A, m, B (đã lưu sẵn B[0] = x)

Tính M = A x B[m-1]

Nếu m≤3 thì chuẩn hóa M = normalize(M)

Nếu m=3 thì lưu vi\_tri\_khu = i với M[i]=1

Nếu m>3 thì M=M/M[vi\_tri\_khu]

Lưu B[m] = M

Output: Lưu đã chuẩn hóa vào cột m mảng B

**Lưu ý**: phải thay đổi lúc dừng lại tìm vị trí khử linh hoạt để có thể hoạt động với các ma trận khác nhau (trội rõ, hội tụ nhanh thì có thể dừng khi m nhỏ; không trội hẳn, hội tụ chậm thì dừng khi m lớn), làm thế này có thể giảm đáng kể khổi lượng tính toán.

A screenshot of a computer

Description automatically generated with medium confidence

- **Gói kiểm tra** (check):

Input: A, x, eps

Tạo mảng B trống, B[0] = x, calc(A,1,B), calc(A,2,B)

Đặt m = 2

Lặp while:

Nếu phần tử lớn nhất của (B[m]-B[m-1]) < eps => TH1, kết thúc vòng lặp

Nếu phần tử lớn nhất của (B[m]-B[m-2]) < eps => TH2, kết thúc vòng lặp

Nếu lặp 3012 lần mà không có 2 dấu hiệu trên => TH3, kết thúc vòng lặp

Tăng m lên 1, calc(A,m,B)

Output: m, TH, B

Text

Description automatically generated

- **Gói xuống thang TH1** (deflate1):

Input: A, v

Tạo ma trận theta

Xuống thang A = theta \* A

Output: A đã xuống thang, theta

A screenshot of a computer

Description automatically generated with medium confidence

- **Gói xuống thang TH2** (deflate2):

Input: A, v1, v2

A, theta1 = deflate1(A,v1)

Tính v2' = theta1 \* v2

Chuẩn hóa v2' = normalize(v2')

A, theta2 = deflate1(A,v2')

Output: A đã xuống thang

Text

Description automatically generated

- **Gói xử lý TH1**:

Input: x, i, A, B

v = B[-1]

Tính

lamda = /B[-1] (tọa độ bất kì khác 0)

In ra lamda

Nếu i = 0 thì in ra v (Nếu i khác 0 thì dùng thuật toán giải hệ pt tuyến tính để tìm vecto riêng rồi in ra)

A=deflate1(A,v), i+=1

Output: A, i

Text

Description automatically generated

- **Gói xử lý TH2**:

Input: x, i, A, m, B

Tính , ,

lamda1, lamda2 =+-sqrt( )

Kiểm tra xem m có chia hết cho 2 không để tính v1, v2 theo công thức

In ra lamda1, lamda2

Nếu i = 0 thì in ra v1, v2 (Nếu i khác 0 thì như TH1)

A = deflate2(A,v1,v2)

i+=2

Output: A, i

Text

Description automatically generated

- **Gói xử lý TH3**:

Input: x, i, A, B

Tính ,

Chọn a1, b1, c1, a2, b2, c2 (khác 0)

Tính p, q như công thức trong lý thuyết

Tính lamda1, lamda2 = cách giải pt bậc 2 (dùng delta)

Tính v1, v2 như công thức trong lý thuyết

In ra lamda1, lamda2

Nếu i = 0 thì in ra v1, v2

(Nếu i khác 0 thì như TH1)

Text

Description automatically generated

* 1. **Chương trình chính**

Input: A, eps

Tạo vector x ngẫu nhiên

i = 0, n = cấp của ma trận vuông A

Lặp while (i < n)

m, TH, B = check(A,x)

In ra số lần lặp m

if TH = 1 => TH\_1(x,i,A,B)

if TH = 2 => TH\_2(x,i,A,m,B)

if TH = 3 => TH\_3(x,i,A,B), kết thúc vòng lặp

Text

Description automatically generated

* 1. **Ví dụ**

- VD1: Ma trận có đủ 3 trị riêng thực, đơn (chạy tốt, hội tụ nhanh)

A screenshot of a computer

Description automatically generated with low confidence

- VD2: Ma trận có 2 trị riêng đơn, thực, trái dấu (chạy tốt, hội tụ nhanh)

Text

Description automatically generated

- VD3: Ma trận có 2 trị riêng phức liên hợp (chạy tốt)

Text

Description automatically generated

- VD4: Ma trận có các trị riêng có modun gần bằng nhau (hội tụ rất chậm)

A black screen with white text

Description automatically generated with low confidence

- VD5: Ma trận thưa 10x10 (chạy tốt, hội tụ nhanh dần khi còn ít trị riêng)

Text

Description automatically generated

- Các ma trận có trị riêng trội bội >1 hoặc các trị riêng trội là các căn bậc n>2 của 1 số thì chương trình sẽ chạy sai.

1. **Đánh giá phương pháp**
   1. **Ưu điểm**

- Ý tưởng khá đơn giản

- Hoạt động tốt với các ma trận thưa (do phép toán chính là nhân ma trận)

- Linh hoạt (có thể điều chỉnh để tìm trị riêng modun nhỏ nhất)

* 1. **Nhược điểm**

- Hội tụ chậm nếu trị riêng không trội hẳn

- Chỉ tìm được trị riêng và vector riêng trội, nếu muốn tìm hết vector thì phải xuống thang rồi giải hệ phương trình

- Dễ tràn số

**Tài liệu tham khảo**

[1] Lê Trọng Vinh. *Giáo trình* *Giải tích số.* Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật. 2007